# 第6讲 代数方程模型实验

## 实验目的

**案例6：**

1. 理解向量、向量的线性组合与线性表示、向量组的线性相关与线性无关、最大线性无关组的概念；

2. 掌握向量组线性相关和线性无关的有关性质及判别法；

3. 掌握向量组的最大线性无关组和秩的性质和求法；

4. 通过调味品配制问题理解上述知识在实际中的应用。

**案例7：**

1. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解的概念；

2. 掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法；

3. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念；

4. 掌握非齐次线性方程组的基础解系和通解的求法。

**案例8：**

1. 掌握特征值、特征向量、特征方程、矩阵的对角化等概念和理论；

2. 掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法；

3. 理解由差分方程

4. 所描述的动态系统的长期行为或演化；

5. 提高对离散动态系统的理解与分析能力。

## 基本概念

1. 线性相关和线性无关

2. 最大线性无关组

3. 网络流

4. 三对角形线性方程组的追赶法

5. 特征值与特征向量

6. 特征值与特征向量的求法

7. 矩阵的对角化

8. 离散线性动态系统

## 实验内容

### 案例1

某调料有限公司用 7 种成分来制造多种调味制品。以下表格列出了 6 种调味制品A、B、C、D、E、F 每包所需各成分的量：

利用Matlab 辅助解决以下问题：

1. 一个顾客为了避免购买全部 6 种调味制品，他可以只购买其中一部分并用它们配制出其余几种调味制品。为了能调配出其余几种调味品，这位顾客必须购买的最少调味品的 种类是多少？写出所需最少的调味品的集合。
2. 由（1）中得到的最小调味品集合是否唯一？能否找到一个最小调味品集合？
3. 用（1）中的最小调味品集合，按下列成分配制一种新调味品，写出所需的调味品的包数。

红辣椒：18，姜黄：18，胡椒：9，欧莳萝：9，大蒜粉：4.5，盐：4.5，丁香油：3.25

1. 6 种调味品每包的价格如下（人民币：元）：

**Table 1 调味包价格**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
| 2.30 | 1.15 | 1.00 | 3.20 | 2.50 | 3.00 |

利用（1）、（2）中所找到的最少调味品集合，计算（3）中配制的新调味品的价格。

1. 另一顾客希望按下列成分配制一种调味品，他要购买的最小调味品集合是什么？

红辣椒：12，姜黄：14，胡椒：7，欧莳萝：7，大蒜粉：35，盐：35，丁香油：175

1. 在上述问题的解答种，用到了哪些知识点？请列出所用知识点。

**Table 2 每包调味品所需各成分的量（单位：盎司）**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **调味品**  **成分** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
| 红辣椒 | 3 | 1.5 | 4.5 | 7.5 | 9 | 4.5 |
| 姜黄 | 2 | 4 | 0 | 8 | 1 | 6 |
| 胡椒 | 1 | 2 | 0 | 4 | 2 | 3 |
| 欧莳萝 | 1 | 2 | 0 | 4 | 1 | 3 |
| 大蒜粉 | 0.5 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1.5 |
| 盐 | 0.5 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1.5 |
| 丁香油 | 0.25 | 0.5 | 0 | 2 | 1 | 0.75 |

#### 案例分析

首先，将实际问题线性代数化，把每一种调味品含有的成分看成一个 7 维的列向量,则6种调味品对应6个7维的列向量，分别记为：



**步骤一：**

分析这6个列向量构成的向量组的线性相关性。若向量组线性无关，则顾客无法只购买其中一部分调味制品；若向量组线性相关，则他可以只购买其中一部分调味制品并用它们配制出其余几种调味制品。

设ABCDEF对应的红辣椒、姜黄、胡椒、欧莳萝、大蒜粉、盐和丁香油组合分别为向量，根据Tab-2将他们赋值。再构建一个总的A矩阵。

**步骤二：**

为了确定最小调味品集合，必须确定向量组的一个最大线性无关组。所以利用公式找出A的行最简形和一组最大线性无关组。根据A0确定最大无关组有哪些。

**步骤三：**

确定哪些线性无关组满足实际意义，即用来表示另外向量时系数均为正数，这一步可由MATLAB逐步实现。

**步骤四：**

根据题目要求的调味品集合，用rref()公式可以求得行最简式，看是否可以用最大无关组表示出（3）问需要的调味品集合，或者用公式进行求解。然后查看其秩是否和最大无关组相同，即是否线性无关，则可以判断是否有唯一解。

**步骤五：**

代入（4）问中提供的价格表格即可求出需要的价格。

**步骤六：**

同步骤四一样求出（5）问。

#### 实验程序

%%问题（1）的 Matlab 代码

a1 = [3;2;1;1;0.5;0.5;0.25]; %构建ABCDEF六个调味品的向量

a2 = [1.5;4;2;2;1;1;0.5];

a3 = [4.5;0;0;0;0;0;0];

a4 = [7.5;8;4;4;2;2;2];

a5 = [9;1;2;1;2;2;1];

a6 = [4.5;6;3;3;1.5;1.5;0.75];

A = [a1 a2 a3 a4 a5 a6]; %构建总矩阵

[A0, jb] = rref(A) % 求出A 的行最简形和一组最大线性无关组

r = length(jb) % A 的 秩

%根据问题(1)结果判断，得到几组线性无关组，根据实际情况解决问题（2）

%%问题（2）代码

B = [a2 a3 a4 a5];

x1 = B\a1 % 求线性表达的系数x1

x6 = B\a6 % 求线性表达的系数x6

B1 = [a1 a2 a4 a5];

x3\_1 = B1\a3 % 求线性表达的系数 x3

x6\_1= B1\a6 % 求线性表达的系数 x6

% 最大无关组：a1,a3,a4,a5

B2 = [a1 a3 a4 a5];

x2\_2= B2\a2 % 求线性表达的系数 x2

x6\_2= B2\a6 % 求线性表达的系数 x6

% 最大无关组：a1,a6,a4,a5

B3 = [a1 a6 a4 a5];

x2\_3= B3\a2 % 求线性表达的系数 x2

x3\_3= B3\a3 % 求线性表达的系数 x3

% 最大无关组：a2,a6,a4,a5

B4 = [a2 a6 a4 a5];

x1\_4= B4\a1 % 求线性表达的系数 x1

x3\_4= B4\a3 % 求线性表达的系数 x3

% 最大无关组：a3,a6,a4,a5

B5 = [a3 a6 a4 a5];

x1\_5= B5\a1 % 求线性表达的系数 x1

x2\_5= B5\a2 % 求线性表达的系数 x2

%%问题（3）代码

%已知a2 a3 a4 a5为选中的最小调味集合

combine\_1 = [18 18 9 9 4.5 4.5 3.25]'; %需要配置的调味品集合，需要转置

x1 = B\combine\_1 %用左除不用右除

%%问题（4）代码

price\_1 = [1.15 1.0 3.2 2.5]; %只取a2 a3 a4 a5

value\_1 = price\_1\*x1

%%问题（5）代码

combine\_2 = [12 14 7 7 35 35 175]'; %需要配置的调味品集合，需要转置

x2 = B\combine\_2 %用左除不用右除

#### 实验结果

**问题一：**

A0 =

1 0 2 0 0 1

0 1 -1 0 0 1

0 0 0 1 0 0

0 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0

jb =

1 2 4 5

r =

4

**问题二：**

x1 =

0.5000

0.5000

-0.0000

-0.0000

x6 =

1.5000

0.5000

0.0000

0.0000

**问题三：**

x1 =

2.5000

1.5000

1.0000

0

**问题四：**

value\_1 =

7.5750

**问题五：**

x2 =

-325.0000

-186.8750

161.6250

14.2500

#### 结果分析

（1）根据问题一结果可得，A的秩为4，所以最少购买四种调味品，又由行最简形A0可得a4和a5必须包含在线性无关组内，所以一共有种组合方式，它们分别为：

 （2）根据实际情况可知，当另外两个向量由线性无关组表示时，系数必须为正数，由此，对（1）中六种情况进行筛选，发现只有这组线性无关组满足题意，即最小调味品集合唯一。

（3）根据问题三的结果可知，可以调配出需要的新调味品，且结果唯一，为：

（4）将BCDE的价格代入，新调味品价格为7.570元。

（5）同问题三分析方法一致，代入数据进行计算，列式后求出结果为：，与实际情况不符，所以无法调配。

（6）本题用到的知识点主要有：向量组的线性相关和线性无关、向量组的最大线性无关组、线性表示等。

### 案例2

（1）假设一个经济系统由煤炭、电力和钢铁行业组成，每个行业的产出在各个行业中的分配，如表3所示，每一列中的元素表示占该行业总产出的比例。以表的第三列为例，钢铁行业的总产出分配如下：60%分配到煤炭行业，20%分配到电力行业，剩余的 20%分配到钢铁行业（钢铁行业把这 20%当作部门运营所需的投入）。因为考虑了所有的产出，所以每一列的和等于1

**Table 3 一个简单的经济系统**

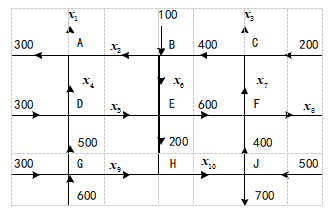
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **购买者** | **产出分配** | | |
| 煤炭 | 电力 | 钢铁 |
| 煤炭 | 0 | 0.4 | 0.6 |
| 电力 | 0.6 | 0.1 | 0.2 |
| 钢铁 | 0.4 | 0.5 | 0.2 |

把煤炭、电力和钢铁行业每年总产出的价格（即货币价值）分别用pc，pe和ps表示。试求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格。

（2）下图给出了某城市部分单行道的交通流量（每小时过车数）。假设

1）流入网络的流量等于全部流出网络的流量；

2）全部流入一个节点的流量等于全部流出此节点的流量。确定该交通网络未知部分的具体流量。



**Figure 1 某城市部分单行道的交通流量图**

（3）一年生植物春季发芽，夏天开花，秋季产种，没有腐烂、风干、被人为掠去的那些种子可以活过冬天，其中的一部分能在第二年春季发芽，然后开花、产种，其中的另一部分虽未能发芽，但如又能活过一个冬天，则其中一部分可在第三年春季发芽，然后开花、产种，如此继续。现要研究这种植物数量的变化规律，作如下假设：

（1）种子只要能在春天发芽，植物就能成活，可开花、产种，也就是说，植物数量的变化完全依赖于种子的发芽情况。

（2）种子最多能活过两个冬天。设一颗植物秋季产种的平均数为c，种子能够活过一个冬天（称1岁）的比例为b，1岁的种子能在春季发芽的比例为a1 ，未能发芽但又能活过一个冬天的比例仍为b，2岁的种子能在春季发芽的比例为a2。考虑如下的问题：建立数学模型研究这种植物数量的变化规律。

1. 设某年有植物 x0 ，希望n 年后它的数量达到 xn ，求出第二年及以后诸年这种植物的数量。

2）给定c = 10 ，a1 = 0.5 ，a2 = 0.25 ，b = 0.2 ，开始有100棵植物，要求50年后有1000棵植物。利用Matlab，求出第二年及以后诸年这种植物的数量。

#### 实验程序

%%问题一代码

A = [1 -0.4 -0.6;-0.6 0.9 -0.2;-0.4 -0.5 0.8]; %系数矩阵

rank(A) %系数矩阵的秩

B1 = null(A,'r') % 秩小于未知量个数，无穷解，无常数项求解基础解系

%%问题二代码

B2 = [-1 1 0 1 0 0 0 0 0 0;

0 1 0 0 0 1 0 0 0 0;

0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0;

0 0 0 1 1 0 0 0 0 0;

0 0 0 0 1 1 0 0 0 0;

0 0 0 0 0 0 1 1 0 0;

0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;

1 0 1 0 0 0 0 1 0 0]; %系数矩阵

rank(B2) %系数矩阵的秩

b = [300 500 200 800 800 1000 400 600 1000]'; %常数项

x0 = B2\b %秩小于未知量个数，无穷解，用常数项求特解

C = null(B2,'r') % 对应齐次线性方程组的基础解系，r为左零空间，，计算为9\*2，所以有两个通解

%问题三代码

c = 10; a1 = 0.5; a2 = 0.25; b = 0.2;

x0 = 100; xn = 1000; n = 49;

p = -a1 \* b \* c; %根据公式表达出p

q = -a2 \* b \* (1-a1) \* b \* c; %根据公式表达出q

A1 = sparse(1:n,1:n,p,n,n); %预设p

A2 = sparse(1:n-1,2:n,1,n,n); %预设1

A3 = sparse(2:n,1:n-1,q,n,n); %预设q

A = A1 + A2 + A3; %系数矩阵A

i = [1,n];

j = [1 1];

s = [-q\*x0, -xn];

b = sparse(i,j,s,n,1); %预设常数项，n\*1矩阵

x = A\b; %用稀疏矩阵求解，前提是A和b都是稀疏矩阵

x1 = x(1) %第二年，即过了一年后，稀疏矩阵的调用方法，x(n)

t = 0:n+1;

xx = [x0 x', xn]; %x是本题求出来的，将其与已知条件x0和xn组合

plot(t, xx, 'r-') %画图

#### 实验结果

**问题一：**

ans =

2

B1 =

0.9394

0.8485

1.0000

**问题二：**

ans =

8

x0 =

1.0e+03 \*

0.2000

0.5000

0.8000

-0.0000

0.8000

0

1.0000

0

0.4000

0.6000

C =

0 0

-1 0

0 -1

1 0

-1 0

1 0

0 -1

0 1

0 0

0 0

**问题三：**

x1 =

(1,1) 101.7097



**Figure 2 问题三绘图**

#### 结果分析

1. 分析第一问，秩小于变量数，所以无穷解，用null()函数求解基础解系。因此当（x1为任意数）此时三个产业达到平衡，即如果煤炭行业产出价格为 0.9394 亿美元，则电力行业产出价格为 0.8485 亿美元，钢铁行业产出价格为 1 亿美元，那么每个行业的收入和支出相等。
2. 构建方程，用MATLAB求解秩，发现秩小于变量数，所以依然无穷解，用null()函数求解基础解系，然后用b向量求特解x0，组合即通解 ，其中为C的两个列向量，x1x2为任意数。
3. 列出方程和矩阵：





1. 植物数量变化规律如上。
2. 已知x0和xn，通过构造稀疏矩阵求解x1-xn-1。
3. 和2）一样分析，代入数据和公式求解。

### 案例3

（1）在加利福尼亚的红杉森林深处，斑点猫头鹰是褐脚森林鼠的主要捕食者，其多达80%的食物都来源于森林鼠。记猫头鹰和森林鼠在时刻k的数量为，其中k是以月份为单位的时间，Ok是研究区域中猫头鹰的数量，Rk是老鼠的数量（单位：千）。假设有如下的状态-矩阵模型：



其中p是一个待定的正参数。第一个方程中的0.5Ok说明，如果没有森林鼠做食物，每个月只有一半的猫头鹰可以存活。第二个方程中的1.1Rk说明，如果没有猫头鹰作为捕食者，老鼠的数量每个月将会增加10%。如果老鼠充足，猫头鹰的数量将会增加0.4Rk，负项-pOk用以度量猫头鹰的捕食所导致的老鼠的死亡数。当捕食参数p=0.104时，试确定该系统的演化。

（2）一只加利福尼亚柳河湾地区斑点猫头鹰的生命周期分为三个阶段：幼鸟期（1 岁以下）、成长期（1 至 2 岁）和成熟期（2 岁以上）。猫头鹰在成长期和成熟期交配，从成熟期开始繁殖，最长可活 20 岁。每对猫头鹰大约需要 1000 公顷作为它们的领地。幼鸟离开巢穴后，为了存活并继续生长，它必须成功找到一个属于自己的新领地（通常还有一个配偶）。

假设在各个生命阶段雌雄猫头鹰的数量之比为 1：1。令  表示在第 年分别处于幼鸟期、成长期和成熟期的雌猫头鹰的数量。

1）1993 年，R. Lamberson 教授和他的同事们根据实际野外数据，建立了如下的状态-矩阵模型：



从中可以看出，第k+1年幼鸟期雌猫头鹰的数量是第k年成熟期猫头鹰数量的 0.33倍。此外，有18%的幼鸟能够存活下来进入成长期；有71%的处于成长期和 94%的处于成熟期的猫头鹰能够存活下来，并被计入第k+1年成熟期猫头鹰之列。按此模型，斑点猫头鹰最终会灭绝吗？

（2）斑点猫头鹰还有生存的可能吗？注意到（1）中的 18%是基于以下事实：尽管有 60% 的幼鸟可以离开旧巢并寻找新领地，但其中只有30%能在寻找过程中存活并找到自己的新领地。寻找过程的存活率主要受到森林中砍伐区的数量影响，因为它使得寻找新领地更加困难 和危险。有些猫头鹰种群生活在没有或少有砍伐区的区域中。在那里，幼鸟得以存活并找到 新领地的比率更好一些。假设猫头鹰幼鸟在寻找过程中的存活率为 50%，即（1）中状态-矩阵的（2，1）元素是 0.3 而不 0.18：



对于该斑点猫头鹰的种群数量，这个状态-矩阵模型意味着什么？

#### 实验程序

%%问题一代码

% 捕食者-被捕食者解的图像表示

clear, clc

a = -20\*100; b = -a; c = a; d = b; p = 0.1; %确定画图范围

n = 100; %序列迭代次数

xlabel('|\lambda| >1,|u|<1')

axis([0 b 0 d]), grid on, hold on

x = linspace(a,b,30);

A = [0.5 0.4;-0.104 1.1] %特征值绝对值<1

[pc,lambda] = eig(A) %求 A 的特征值和对应的特征向量

[Y,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend') %对特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda)

lambda = temp(I) %输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

pc = -pc(:,I)

z1 = pc(2,1)/pc(1,1)\*x %特征向量 v1

z2 = pc(2,2)/pc(1,2)\*x %特征向量 v2

h=plot(x,z1),set(h,'linewidth',2),text(x(7),z1(7)-100,'v1')

h=plot(x,z2),set(h,'linewidth',2),text(x(20),z2(20)-100,'v2')

button = 1;

while button == 1

[xi yi button] = ginput(1); %用鼠标选初始点

plot(xi,yi,'go'),hold on

X0 = [xi;yi];

X = X0;

for i=1:n

X = [A\*X, X0]; %用这种方式迭代，并画图

h = plot(X(1,1),X(2,1),'R.',X(1,1:2),X(2,1:2),'r-');

hold on

text(X0(1,1),X0(2,1),'x0')

quiver([X(1,2),1]',[X(2,2),1]',[X(1,1)-X(1,2),0]',[X(2,1)-X(2,2),0]',p)

set(h,'MarkerSize',6),grid,

end

end

%%问题二代码

% P8\_3.m

A = [0 0 0.33;0.3 0 0;0 0.71 0.94];

[pc,lambda] = eig(A); %求A 的特征值和对应的特征向量

[Y,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %对特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I) %输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

lambda\_norm = [norm(lambda(1));

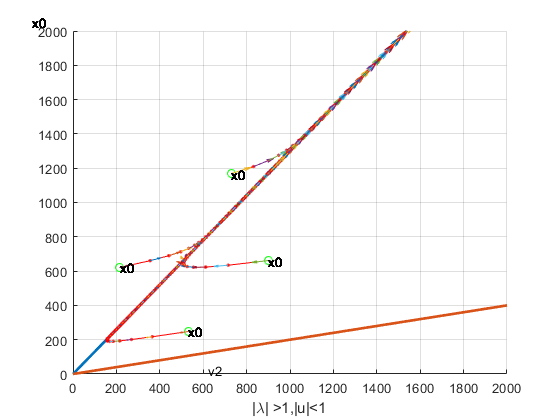
norm(lambda(2));

norm(lambda(3))]

% 三个特征值的绝对值

pc = pc(:,I) %与特征值对应的特征向量

#### 实验结果



**Figure 3 问题一图像**

#### 结果分析

（1）排斥最快的方向为过原点和特征向量v1的直线方向。其中v1对应的特征值的绝对值大于1。如果x0在这条直线上，则c2=0且迅速远离原点。吸引最快的方向由特征向量v2决定，其对应的特征值的绝对值大于1。

（2）最后的每个元素（处于各个生命阶段猫头鹰的数量）的长期增长率为 1.009。约为的倍数，即特征向量描述了猫头鹰的最终分布：对于每 10 只处于幼鸟期的猫头鹰，大约有 3 只处于成熟期和 31 只处于成长期的猫头鹰与之对应。

## 实验感想

本次案例学习中，我按时上线接收文件，细致地观看了PPT和电子课本。通过本次对PPT和电子课件附录的学习，我基本理解了案例6中的线性相关（无关），案例7的齐次线性方程组基础解系和通解，案例8的特征值、特征向量、特征方程、矩阵的对角化等概念的。并掌握了最大线性无关组、基础解系及通解和分析对角矩阵的方法。此外我还复习了不少大一学的线性代数的知识，并学会运用数学知识和MATLAB工具解决实际问题。

我认为这次实验是非常有意义有价值的，通过这次案例学习，我对代数运算的相关知识和应用有了更深的理解。虽然题量很多，但通过查阅资料和同学交流探讨还是能够较好地解决它们。这次实验不仅题量多，题目的综合性也很强，要用到前几次实验的一些知识来辅助学习，在学习过程中也有不少收获。在运行程序的过程中出了一些报错，我经过仔细核对和调试，最终都解决了它们。在这次实验中涉及到的疑难知识点、用到的新函数我都通过记笔记或者录屏的方式认真记了下来，丰富了我的MATLAB知识储备。在本次实验中，所有的实验均由我独立完成，相关代码和图片结果也都整理到位，代码中存在疑惑的地方以及需要注意的地方均已注释好，以备下次复习时使用。

在这次实验里，我认真完成了两个实验任务，颇有所获，相信未来几次实验会继续收获不少新知识。

6 许柏城 62号 第六次课

2020-04-16 20:00